

## Teoria elementare dei sistemi

- Definizione di concetti della **teoria elementare dei sistemi**:
  - **Sistema**: insieme di più elementi<sup>1</sup> che interagendo tra loro danno luogo ad una nuova entità con un determinato scopo (funzionalità).
    - **Sistema naturale** (esistono già in natura) o **artificiale** (costruiti dall'uomo)
    - **Sistema automatico** a **catena** (anello/loop) **aperta** oppure **chiusa** (controllo/regolazione): i sistemi automatici a **catena chiusa** permettono un **intervento** al fine di modificare la risposta del sistema e non solo di rilevarla come succede nei sistemi automatici di misura (a catena **aperta**) che ne permettono solo un utilizzo con spesso un'opportuna visualizzazione.
    - **Sistema statico** (il valore di tutte le variabili si mantiene invariato nel tempo) o **dinamico** (le grandezze del sistema variano nel tempo)
    - **Sistema lineare** o **non lineare**: sistemi continui e invarianti dove vale o meno il *principio di sovrapposizione degli effetti*<sup>2</sup>. In realtà un sistema non è mai lineare ma si considera tale, in prima approssimazione, operando una semplificazione in modo da studiarlo più semplicemente (con metodi matematici).
    - **Sistema deterministico** (unica storia possibile nell'evolvere verso univoco risultato) o **stocastico** (se, sottoposti alle stesse condizioni iniziali ed agli stessi stimoli, si comportano evolvendosi in modo casuale quindi non prevedibile)
    - **Sistema continuo** (con o senza *memoria*): con graduali variazioni ed infiniti valori delle variabili oppure **discreto** (*combinatori* o *sequenziali* o in *logica mista*): con brusche variazioni ed un numero finito di valori
    - **Sistema invariante** (stazionario) o **variante** (con degrado delle prestazioni: i parametri che dovrebbero rimanere costanti, variano nel tempo ad esempio per usura)
  - **Modello**: descrizione del reale che evidenzia i parametri o le caratteristiche essenziali per ridurre la complessità nel raggiungere un determinato obiettivo. E' un'astrazione<sup>3</sup> del sistema.
  - **Simulazione** (del comportamento del sistema): strategia risolutiva<sup>4</sup> che, attraverso modelli noti, produce risultati che rappresentano una o più possibili storie (evoluzioni) di un sistema dinamico e permette di fare **previsioni**.  
Tale strategia prevede:
    - La definizione dell'obiettivo
    - L'identificazione del sistema (scomponendo in eventuali sottosistemi)
    - La definizione dei vincoli (limiti reali e del modello)
    - Modello di massima e rigoroso
    - Simulazione, spesso usando il computer (simulazione numerica), per ottenere per diverse eccitazioni un numero molto elevato di possibili risposte

<sup>1</sup> Un sistema non è un oggetto ma la definizione di un ambito cioè dei limiti di analisi. L'analisi sistemica è tipicamente con approccio **Top-Down** alla soluzione dei problemi prevedendo la decomposizione in "parti" più semplici da risolvere o, equivalentemente, lo sviluppo degli algoritmi per raffinamenti successivi.

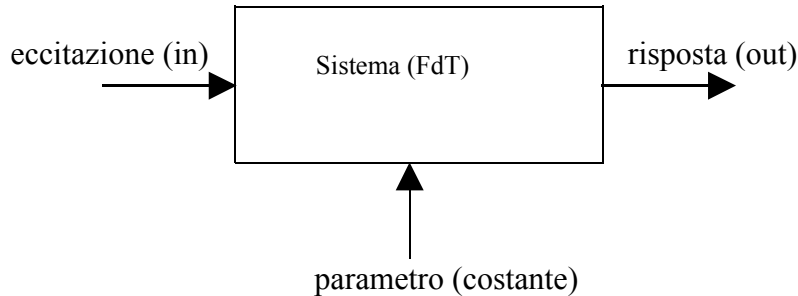
<sup>2</sup> La **risposta** del sistema a più stimoli si può determinare sommando le risposte a ogni singolo stimolo.

<sup>3</sup> **astrazione**: idealizzazione di un oggetto descrivendone l'essenziale, le funzionalità caratteristiche

<sup>4</sup> Possibili differenti strategie: metodo simbolico o diretto (formula risolutiva), per enumerazione (quando il numero dei risultati è limitato ed è noto un criterio per individuare correttamente la soluzione), per tentativi (si procede per approssimazioni successive restringendo sempre più il campo delle possibili soluzioni).

Tale descrizione dinamica di un sistema non è mai priva di errori perché i modelli sono delle approssimazioni. La scelta del risultato cercato si risolve, poi, nel vagliare l'insieme dei risultati, alla ricerca di quello che verifica una prefissata condizione (criteri di scelta)

- Illustrazione, con uso di schema a blocchi, di un sistema (**paradigma ingresso/uscita**)



Si definisce **Funzione di Trasferimento** di un sistema il rapporto tra la variazione dell'uscita e quella dell'eccitazione.

$$\text{FdT} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{variazione out}}{\text{variazione in}}$$

Nel caso più semplice<sup>5</sup> l'uscita è direttamente proporzionale all'ingresso con costante di proporzionalità  $G$  detta guadagno :

$$\text{out} = G * \text{in} \quad \text{con } G \text{ positivo}$$

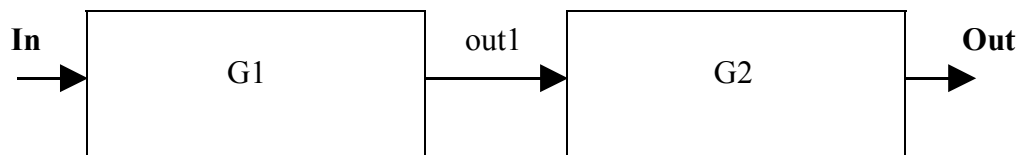
se  $G > 1$  si realizza un'**amplificazione** se  $0 < G < 1$  si realizza un'**attenuazione**

### Algebra dei blocchi

Ogni sistema complesso può essere scomposto in sottosistemi più semplici tra loro connessi con due tipiche configurazioni:

- Blocchi in **cascata**
- Blocchi in **parallelo**

Due blocchi sono in **cascata** se l'uscita dell'uno costituisce l'ingresso dell'altro:

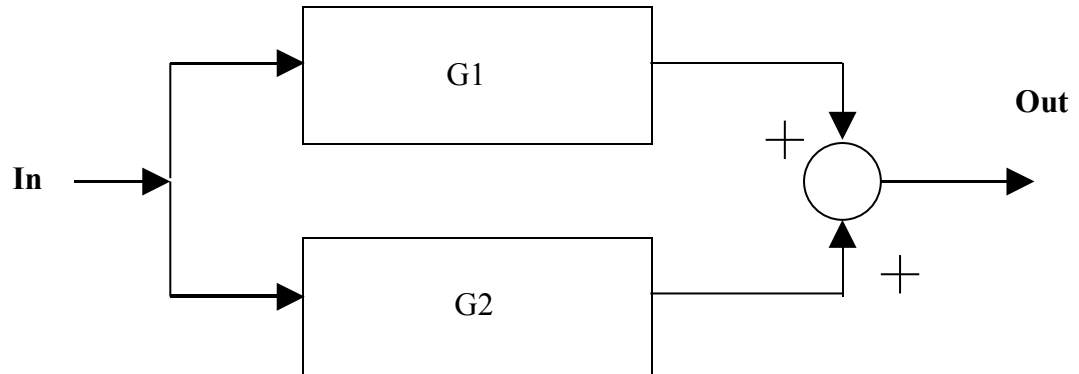


$$G = \frac{\text{Out}}{\text{In}} = G1 * G2$$

<sup>5</sup> **Sistema lineare**: vale il principio di sovrapposizione degli effetti (la risposta a più eccitazioni è la somma delle singole risposte ad ogni eccitazione). Simulando l'evoluzione di sistemi reali, li modelleremo in prima approssimazione come sistemi lineari.

La FdT complessiva di blocchi in cascata è pari al **prodotto** delle singole FdT di ciascun blocco.

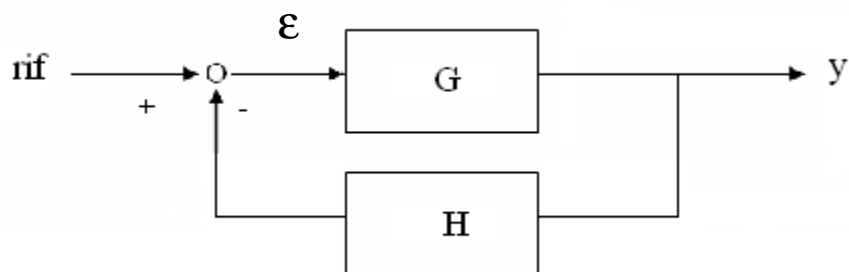
Due blocchi sono in **parallelo** se hanno lo stesso ingresso e le loro uscite si sommano algebricamente:



$$G = \frac{\text{Out}}{\text{In}} = G1 + G2$$

La FdT complessiva di blocchi in parallelo è pari alla **somma algebrica** delle singole FdT di ciascun blocco.

### Sistema a catena chiusa



$\epsilon = \text{rif} - H*y$  errore o misura differenziale

$G = y / \epsilon$  guadagno del sistema a catena aperta

$G_r = y / \text{rif}$  guadagno del sistema retroazionato

$$G_r = G / (1 + G*H)$$

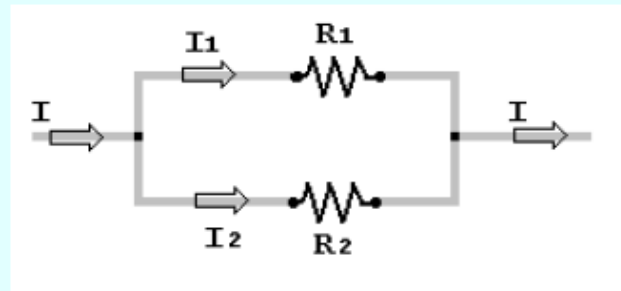
guadagno del sistema retroazionato < guadagno del sistema a catena aperta

quindi la retroazione negativa **attenua**

cioè diminuisce gli errori, i disturbi, il tempo di risposta del sistema

## Esempio: applicare il principio di **sovrapposizione degli effetti**

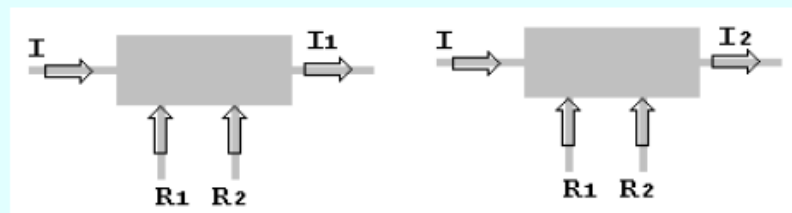
Cercare la funzione di trasferimento del sistema mostrato nel grafico sottostante.



L'obiettivo è rappresentare il sistema, e studiare la relazione esistente tra le correnti

La corrente  $I$  attraversa il collegamento in parallelo, separandosi in  $I_1$  ed  $I_2$ . Supponiamo innanzitutto che  $R_1$  ed  $R_2$  siano costanti. Essendo il sistema *lineare*, vale il principio di **sovrapposizione degli effetti**, il quale afferma che l'effetto dovuto a cause diverse è dato dalla somma degli effetti delle singole cause. In sostanza l'uscita dipende dalla combinazione lineare dei vari effetti e quindi è possibile scomporla in tanti termini, ognuno dei quali è proporzionale al corrispondente ingresso.

Alla luce di tale principio, per trovare le *funzioni di trasferimento* cercate, occorre studiare due sottosistemi, che assumono il seguente aspetto:



Poiché nel periodo di osservazione il sistema si presenta con i due resistori collegati in parallelo, le differenze di potenziale ai capi di  $R_1$  ed  $R_2$  saranno le stesse; in formule si ha:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Sapendo che  $I = I_1 + I_2$  si ha che

$$I_2 = I - I_1$$

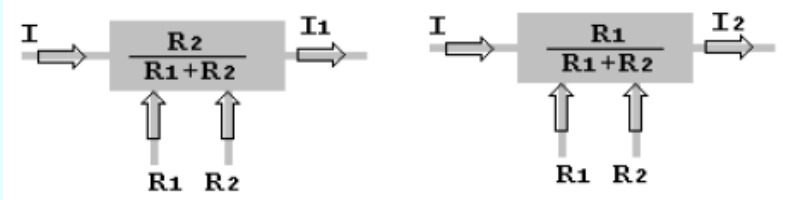
Sostituendo nella prima formula si ottiene

$$I_1 R_1 = (I - I_1) R_2 = I R_2 - I_1 R_2$$

da cui

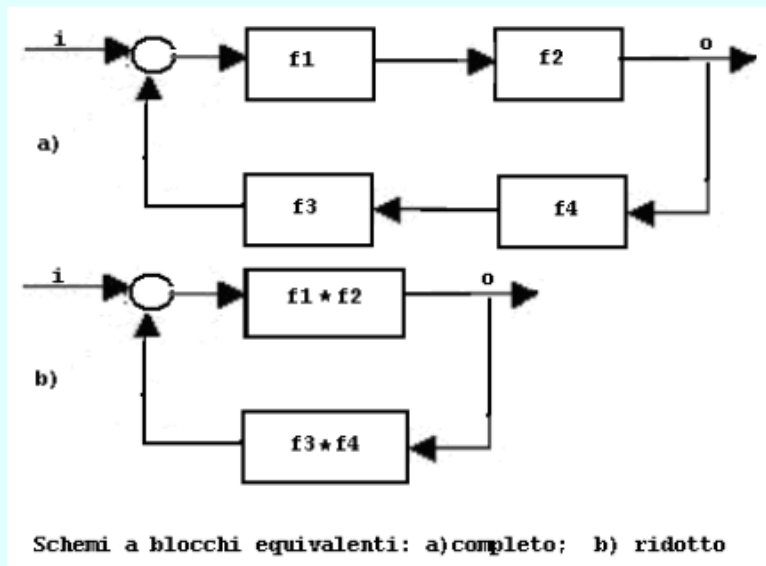
$$I_1 = I R_2 / (R_1 + R_2) \quad \text{ed} \quad I_2 = I R_1 / (R_1 + R_2)$$

A questo punto è possibile disegnare i due blocchi con le relative funzioni di trasferimento:



## Esempio: algebra dei blocchi

La figura seguente mostra la riduzione di uno schema a blocchi in uno più semplice.



## Disturbo

Se si indica con "i" gli input, con "o" gli output, con "p" i parametri e con "d" i disturbi, allora il modello generale può essere rappresentato come nella Figura 1.1.a. Si noti che i parametri ed i disturbi vengono indicati da frecce che entrano nel blocco i primi dal basso ed i secondi dall'alto.

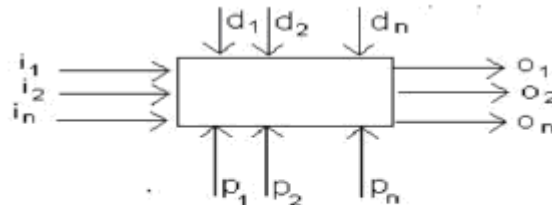


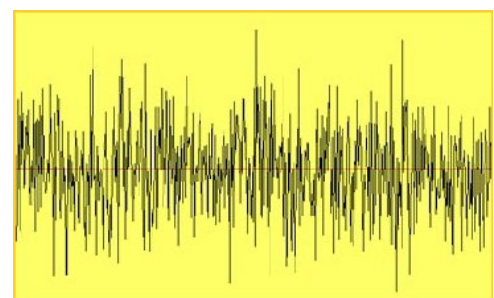
Figura 1.1.a: Modello generale di un sistema

**Disturbo: evento asincrono, imprevedibile ed a volte incontrollabile che influenza il sistema compromettendone la stabilità**

Se pensiamo ad un edificio, un terremoto è decisamente un disturbo che potrebbe compromettere la stabilità del sistema. Un improvviso calo di tensione può provocare dei disturbi ad un calcolatore, che possono essere la semplice perdita dei dati non archiviati o il guasto di qualche componente.

*Il disturbo che interagisce con un segnale di comunicazione, producendo una interferenza, viene detto rumore.*

“**Rumore bianco**”: segnale del tutto casuale; nessuna informazione sul suo andamento in un qualsiasi intervallo di tempo, fornisce informazioni sul valore che assumerà nell'istante successivo

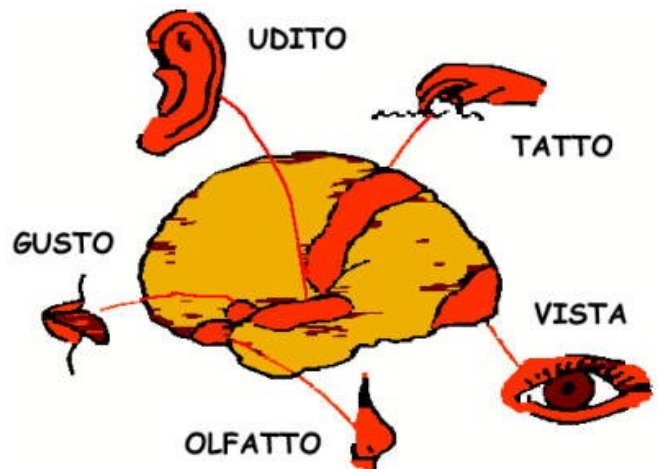


## Sistema retroazionato

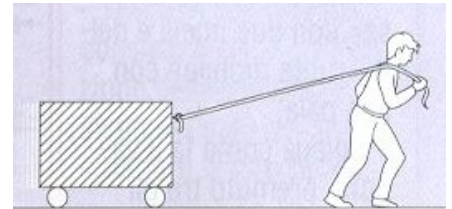
I **trasduttori** sono dispositivi che servono a trasformare grandezze di natura diversa al fine di renderle compatibili.

I **sensori**, sostituendo i sensi dell'operatore umano, servono a trasdurre le grandezze fisiche in grandezze elettriche più facilmente elaborabili.

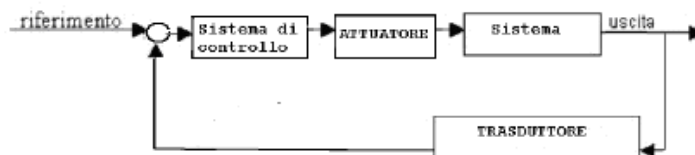
Normalmente un controllore è realizzato con un microprocessore specializzato che utilizza grandezze elettriche mentre il sistema che si vuole controllare restituisce in uscita grandezze fisiche di tipo diverso che si vogliono misurare. Per esempio uno scaldabagno restituisce in uscita il calore necessario a scaldare l'acqua.



Gli **attuatori**, sostituendosi all'intervento dell'operatore umano, servono a trasdurre le grandezze elettriche, risultato dell'elaborazione, in grandezze fisiche di natura diversa: quelle adatte per sollecitare il sistema controllato ed ottenere le modifiche desiderate. Modificano, dunque, gli ingressi del sistema secondo i segnali elettrici provenienti dal controllore traducendoli in grandezze fisiche "comprensibili" dal sistema controllato.



Se si considerano i due componenti suddetti, allora lo schema del sistema retroazionato assume l'aspetto mostrato in Figura

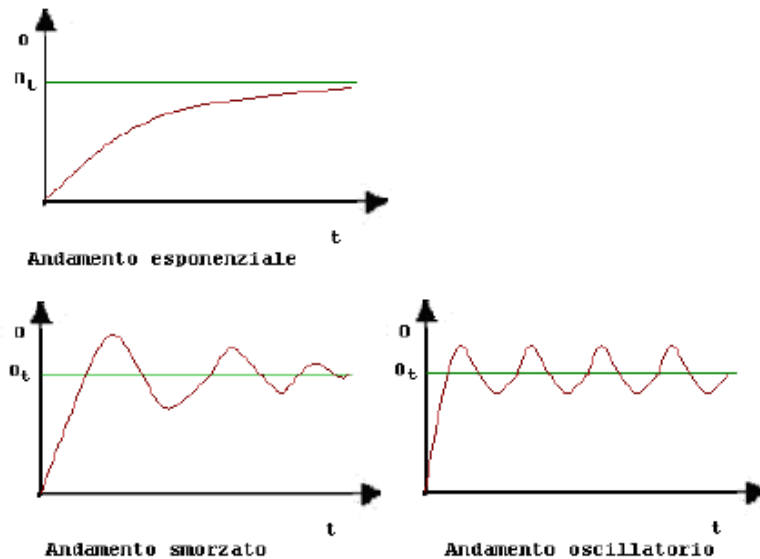


Rappresentazione di un sistema retroazionato

Il riscaldamento dell'acqua di uno scaldabagno, su cui viene impostata, tramite termostato, la temperatura a 60°, fa sì che quando l'acqua ha raggiunto la temperatura desiderata, automaticamente si spegne, per riaccendersi quando la temperatura rilevata scende al di sotto della temperatura impostata. Lo scaldabagno è quindi un sistema controllato, che riceve in ingresso metano oppure energia elettrica e lo trasforma in calore. Il termostato in questo caso funge da dispositivo di controllo.

Il sistema di controllo ha quindi un segnale di riferimento, che indica il valore ideale che dovrebbe avere il sistema (per esempio nel caso dello scaldabagno il valore di riferimento è 60°), con cui viene confrontata l'uscita, al fine di definire il nuovo valore in ingresso. Può succedere che la grandezza controllata abbia valore negativo, in tal caso si ha una **retroazione negativa**. In generale questo tipo di retroazione serve per annullare il valore del disturbo e portare il sistema in uno *stato stabile*, in uno stato cioè in cui l'uscita tende a mantenersi costante.

## Andamento dell'uscita effettiva e valore teorico



Possibili risposte del sistema

Si può notare che se l'**andamento della risposta** è *esponenziale* o *oscillatorio smorzato*, il sistema si avvicina nel tempo ad uno stato stabile cioè a **regime permanente**; nell'intervallo di tempo che precede l'istante in cui l'uscita raggiunge l'uscita teorica, si dice invece che il sistema è in uno stato di **regime transitorio**.

Se l'andamento è *oscillatorio*, l'uscita non si avvicina mai al valore teorico di riferimento, e pertanto il sistema resta sempre in uno *stato instabile*.

### Tempo di risposta

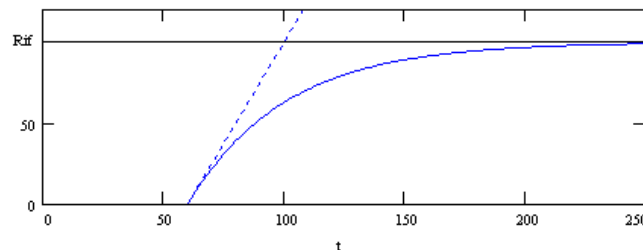
Si è visto che in un sistema che tende verso lo stato di stabilità, lo stato a regime permanente è sempre preceduto da uno stato a regime transitorio.

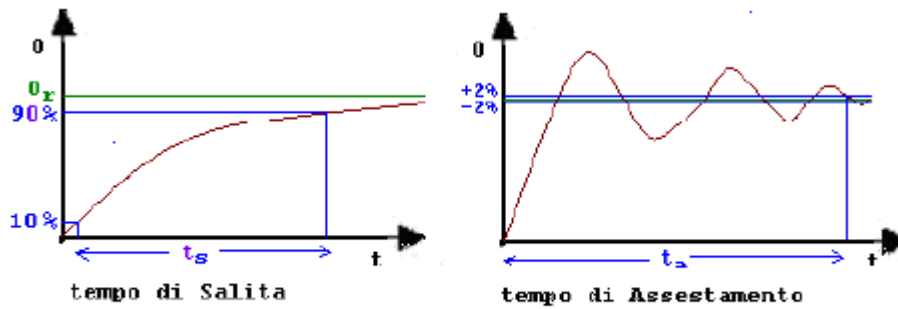
Per valutare allora le prestazioni di un sistema, occorre valutare la velocità con cui, data una sollecitazione, l'uscita del sistema si avvicina al valore di riferimento.

Tale valutazione viene espressa attraverso i tre indicatori seguenti:

- 1. tempo di Ritardo;**
- 2. tempo di Salita;**
- 3. tempo di Assestamento.**

Per capire questo, consideriamo la Figura dove attraverso i tre grafici, vengono rappresentati i tre tempi suddetti.





## Tempi di risposta

### Tempo di assestamento

Si chiama **tempo di assestamento** (o settling time)  $t_a$  il tempo necessario alla risposta a portarsi definitivamente a valori vicini al valore di regime; in genere si misura il tempo dopo cui la risposta non differisce di più del 10% e tipicamente del 2% dal valore di regime.

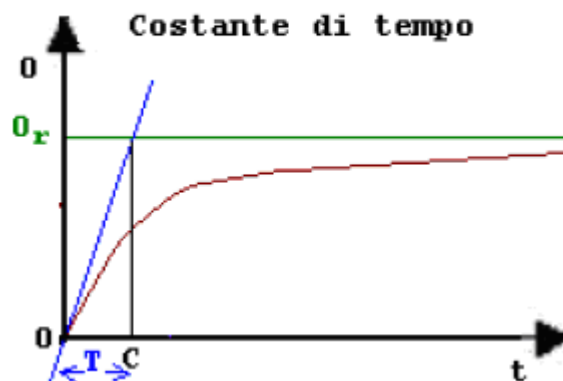
Per un sistema è desiderabile un valore del tempo di assestamento più basso possibile.

### Tempo di salita

Si chiama **tempo di salita** (o rise time)  $t_s$  il tempo necessario alla risposta per portarsi dal 10% al 90% del valore di regime. Tipicamente  $2 \cdot \tau$

### Tempo di ritardo

Si chiama **tempo di ritardo** (o delay time)  $t_d$  il tempo necessario alla risposta per raggiungere il 10% del valore di regime



Nei sistemi che presentano una risposta con andamento esponenziale, si dispone anche dell'indicatore **costante di tempo T**, rappresentato nel grafico di figura dal segmento  $OC$

Dal punto di vista matematico, tale segmento non è altro che la proiezione sull'asse delle ascisse della tangente alla curva nell'origine, limitatamente al punto in cui tale tangente interseca la retta che rappresenta l'uscita di riferimento  $O_r$ ; pertanto il modello matematico è espresso dalla seguente relazione:

$$O(t) = O_r(1 - e^{-t/T})$$

Dal punto di vista fisico  $T$  indica il tempo che occorre al sistema per raggiungere il valore di riferimento  $O_r$ .

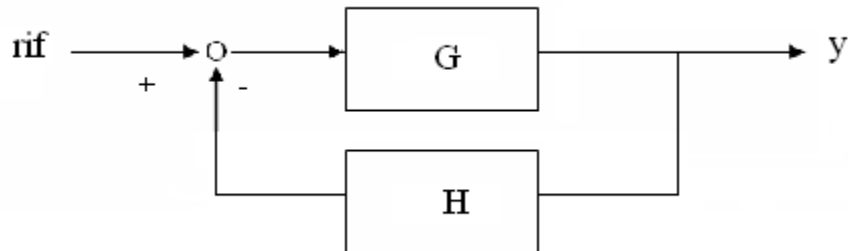
Tuttavia anche nei sistemi che tendono verso uno stato a regime permanente, vi è generalmente un margine di errore che bisogna valutare.



## Tempestività

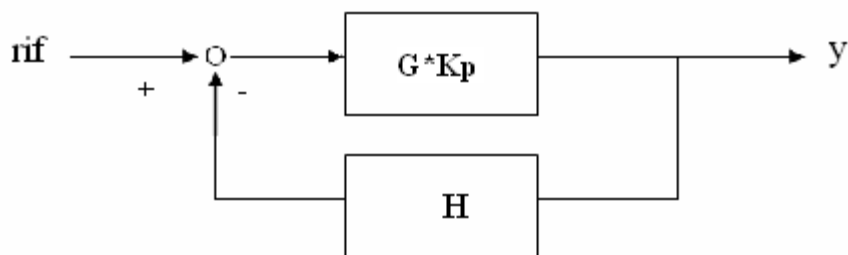
Con riferimento alla proprietà attenuatrice della retroazione negativa si può prevedere che il tempo di risposta del sistema retroazionato sia tanto minore di quello del sistema a catena aperta quanto è maggiore il “tasso di retroazione”

$$tr_{\text{retroazionato}} = tr / (1 + G \cdot H)$$



Potendo progettare dispositivi Hw o SW , inseriti come “blocchi moltiplicatori”, per migliorare la tempestività:

$$tr_{\text{retroazionato}} = tr / (1 + G \cdot K_p \cdot H)$$



## Precisione

Un indicatore molto importante relativo alla risposta del sistema ed alle sue prestazioni è la **precisione** con cui il sistema risponde alle sollecitazioni.

La valutazione dell'errore ci permette di capire con quale precisione risponde il sistema alle sollecitazioni esterne.

Definiamo innanzitutto il **valore assoluto dell'errore** come la differenza tra l'**uscita teorica** e l'**uscita effettiva**, considerati nel medesimo istante di tempo, in formule:

$$E_a(t) = |O_t(t) - O_e(t)|$$

### Esempio

Se il valore assoluto dell'errore vale 3, allora esso ha maggior peso se la grandezza in considerazione vale 100 invece di 1000.

L'errore assoluto differisce dall'errore relativo, poiché quest'ultimo fornisce una valutazione dell'errore in relazione al valore di riferimento.

## In formule

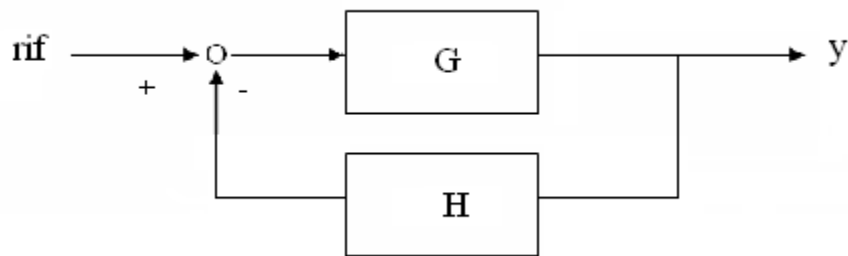
$$E_r(t) = E_a(t) / O_r(t)$$

L'errore relativo è sempre compreso tra 0 ed 1, pertanto moltiplicando tale valore per 100 si può conoscere, in percentuale, quando incide l'errore sul valore di riferimento.

*La valutazione dell'errore è determinante per comprendere la precisione con cui il sistema risponde a determinate sollecitazioni.*

Con riferimento alla proprietà attenuatrice della retroazione negativa si può prevedere che l'errore relativo del sistema retroazionato sia tanto minore di quello del sistema a catena aperta quanto è maggiore il “*tasso di retroazione*”

$$E_{r\_retroazionato} = E_r / (1 + G \cdot H)$$



Potendo progettare dispositivi Hw o SW, inseriti come “blocchi moltiplicatori”, per migliorare la precisione:

$$E_{r\_retroazionato} = E_r / (1 + G \cdot K_p \cdot H)$$

